


David Darling, Agnijo Banerjee

# Tutto è matematica

Sull'orlo dell'infinito e oltre

*Traduzione di Andrea Bianchi*

 Nutrimenti

## Indice

Introduzione	9
Una nota al lettore	13
Capitolo 1. La matematica dietro il mondo	15
Capitolo 2. Come vedere in 4D	27
Capitolo 3. Il caso è una bella cosa	49
Capitolo 4. Modelli sull'orlo del caos	77
Capitolo 5. La fantastica macchina di Turing	101
Capitolo 6. Musica delle sfere	129
Capitolo 7. Misteri primi	149
Capitolo 8. Si può risolvere il gioco degli scacchi?	165
Capitolo 9. Che cosa esiste e che cosa non dovrebbe esistere	185
Capitolo 10. Non puoi arrivare là partendo da qua	203
Capitolo 11. Il numero più grande di tutti	227
Capitolo 12. Piegalo, allungalo, come più ti piace	251
Capitolo 13. Dio, Gödel e la ricerca della prova	273

Titolo originale: *Weird Maths. At the Edge of Infinity and Beyond*

Copyright © David Darling and Agnijo Banerjee 2018  
First published in 2018 by Oneworld Publications  
This edition is published by arrangement with Piergiorgio Nicolazzini  
Literary Agency (PNLA)

Traduzione dall'inglese di Andrea Bianchi

© 2018 Nutrimenti srl

Prima edizione ottobre 2018  
[www.nutrimenti.net](http://www.nutrimenti.net)  
via Marco Aurelio, 44 – 00184 Roma

ISBN 978-88-6594-611-4  
ISBN 978-88-6594-636-7 (ePub)  
ISBN 978-88-6594-637-4 (MobiPocket)

*Andate abbastanza a fondo di qualsiasi cosa  
e troverete la matematica.*

Dean Schlicter

*La cosa più incomprensibile della matematica  
è che è comprensibile.*

Kiran Ma

## Introduzione

La matematica è strana. I numeri vanno avanti all'infinito e ci sono diversi tipi di infinito. I numeri primi sono determinanti per la sopravvivenza delle cicale. Una sfera (matematica) può essere sezionata e ricomposta, senza vuoti, per ottenerne una due volte più grande, o un milione di volte più grande di quella originale. Ci sono figure con dimensioni frazionarie e curve che occupano un piano senza lasciare fori. Annoiato da una monotona conferenza, il fisico Stanislaw Ulam scarabocchiò dei numeri, cominciando da zero e disponendoli a spirale, evidenziò tutti i numeri primi e scoprì che molti giacciono su lunghe diagonali, un fatto ancora oggi non del tutto spiegato.

Dimentichiamo spesso quanto strana è la matematica perché siamo così abituati a trattare con numeri e calcoli che sembrano ordinari, il genere di cose che impariamo a scuola e che usiamo ogni giorno. Eppure, il fatto che le nostre menti siano tanto capaci di pensare matematicamente e, volendo, di elaborare una matematica davvero complessa e astratta, è sorprendente. Dopotutto, i nostri antenati, decine o centinaia

di migliaia di anni fa, non avevano bisogno di risolvere equazioni differenziali o dilettersi con l'algebra astratta per poter sopravvivere abbastanza da trasmettere i propri geni alla generazione successiva. Mentre cercavano il pasto successivo o un luogo dove ripararsi, che vantaggio potevano trarre dalle meditazioni sulla geometria in dimensioni superiori o sulle teorie dei numeri primi? Eppure possediamo fin dalla nascita menti che hanno la potenzialità di fare queste cose, e di scoprire, di anno in anno, nuove verità e sempre più sorprendenti sull'universo matematico. L'evoluzione ci ha fornito questa capacità: ma come e perché? Perché siamo, come specie, così bravi nel fare qualcosa che ha tutta l'apparenza di essere solo un gioco intellettuale?

In qualche modo la matematica è intessuta nell'intima trama della realtà. Se andiamo abbastanza a fondo, scopriamo che quelle che sembravano unità tangibili di materia o di energia – gli elettroni e i protoni, ad esempio – si dissolvono nell'immateriale, diventando semplici onde di probabilità, e tutto ciò che ci rimane è uno spettrale biglietto da visita sotto forma di un intricato e bellissimo insieme di equazioni. In un certo senso, la matematica sostiene il mondo fisico intorno a noi, formando un'infrastruttura invisibile. Eppure fa anche di più, spingendosi in regni astratti della possibilità che potrebbero restare per sempre puri esercizi mentali.

In questo libro abbiamo voluto richiamare l'attenzione su alcune delle più straordinarie e affascinanti branche della matematica, comprese quelle che attendono nuovi, emozionanti sviluppi. In alcuni casi, hanno connessioni con la scienza e con la tecnologia: fisica delle particelle, cosmologia, computer quantistici e cose del genere. In altri casi rappresentano, almeno per ora, la matematica per il puro gusto della matematica, e sono avventure in una strana terra che esiste soltanto nell'occhio

della mente. Abbiamo deciso di non evitare certi argomenti solo perché sono difficili. Una delle sfide nel descrivere al grande pubblico molti aspetti della matematica è data dal fatto che si allontanano molto dall'esperienza quotidiana. Ma, in fin dei conti, c'è sempre un modo per collegare il lavoro degli esploratori e dei pionieri di oggi alle frontiere della matematica con il mondo che ci è familiare, anche se il linguaggio che siamo costretti a usare non è preciso come quello che gli accademici sceglierebbero se potessero. È forse vero che se qualcosa, per quanto oscuro, non può essere spiegato ragionevolmente bene a una persona di normale intelligenza allora chi spiega deve migliorare la sua comprensione della materia!

Questo libro è nato in modo insolito. Uno di noi (David) si è occupato di divulgazione scientifica per più di trentacinque anni e ha scritto molti libri di astronomia, cosmologia, fisica e filosofia e perfino un'enciclopedia di matematica ricreativa. L'altro (Agnijo) è un giovane e brillante matematico e ragazzo prodigio, con un quoziente di intelligenza di almeno 162, secondo il Mensa, che, all'epoca in cui questo libro è stato scritto, aveva appena concluso un corso in Ungheria per prepararsi alle Olimpiadi internazionali di matematica del 2017. Agnijo ha cominciato a frequentare David per avere lezioni di matematica e di scienze all'età di dodici anni. Tre anni dopo, abbiamo deciso di scrivere un libro insieme.

Ci siamo messi comodi e abbiamo discusso a lungo gli argomenti da trattare. David, ad esempio, ha proposto le dimensioni superiori, la filosofia della matematica, la matematica della musica, mentre Agnijo desiderava scrivere dei grandi numeri (la sua personale passione), della computazione e dei misteri dei numeri primi. Fin dall'inizio abbiamo deciso di preferire l'insolito e l'assolutamente singolare e di collegare questa strana matematica, dove possibile, a problemi del mondo reale e

all'esperienza di tutti i giorni. Abbiamo anche preso l'impegno a non evitare argomenti solo perché ardui, adottando come mantra la convinzione che se non si riesce a spiegare qualcosa in termini semplici significa che non si è ben capito il problema. In generale, David ha affrontato gli aspetti storici, filosofici e aneddotici di ciascun capitolo, mentre Agnijo si è cimentato con gli aspetti più tecnici. Agnijo ha controllato il lavoro di David e David ha assemblato le parti scritte trasformandole in capitoli compiuti. Tutto ha funzionato sorprendentemente bene. Speriamo che il risultato vi piaccia.

Nel dare uno sguardo alle pagine di questo libro, noterai forse che contiene alcuni simboli, comprese delle  $x$ , delle  $\omega$  (omega) e perfino la bizzarra  $\aleph$  (aleph). Di tanto in tanto troverai un'equazione o una combinazione di caratteri dall'aspetto non familiare, come  $3\uparrow\uparrow 3\uparrow\uparrow 3$  (specialmente nei capitoli sui grandi numeri e sull'infinito). Se non sei un matematico, non scoraggiarti. Sono solo abbreviazioni per concetti che speriamo di aver spiegato in anticipo abbastanza bene e che ci servono per calarci nell'argomento più rapidamente e profondamente di quanto sarebbe possibile per altra via. Uno di noi (David) ha insegnato privatamente matematica agli studenti per anni e non gli è mai capitato di trovarne uno che non abbia reso bene non appena ha cominciato a credere in sé stesso. Il fatto è che siamo tutti matematici per natura, che ce ne rendiamo conto o no. Allora, tenendo a mente questo, tuffiamoci...

## Capitolo 1

### La matematica dietro il mondo

*Sono accadute cose anche più strane; e forse la più strana di tutte è il prodigio che rende la matematica possibile a una razza imparentata con le scimmie.*

Eric T. Bell, *The development of mathematics*

*La fisica è matematica non perché sappiamo così tanto del mondo fisico, ma perché ne sappiamo così poco; sono solo le sue proprietà matematiche che possiamo scoprire.*

Bertrand Russell

In termini di capacità intellettuale, l'*Homo sapiens* non è cambiato molto negli ultimi centomila anni. Mettendo in una scuola di oggi dei bambini preistorici, presi dai tempi in cui sulla Terra giravano rinoceronti pelosi e mastodonti, si svilupperebbero esattamente come i tipici giovani del ventunesimo secolo. I loro cervelli assimilerebbero l'aritmetica, la geometria e l'algebra. E, se ne avessero l'inclinazione, nulla impedirebbe loro di approfondire la materia e forse, un giorno, di diventare professori di matematica a Cambridge o a Harvard.

Il nostro sistema nervoso ha sviluppato la capacità di fare calcoli complessi e di capire cose come la teoria degli insiemi e la geometria differenziale, molto prima che fosse utilizzato a questo scopo. In effetti, è un po' misteriosa la ragione per cui abbiamo questo talento innato per la matematica superiore quando è evidente che non ha valore come mezzo di sopravvivenza. Allo stesso tempo, la ragione per cui la nostra specie ha sopravvanzato le altre ed è sopravvissuta è il vantaggio che ha sui concorrenti in termini di intelligenza e la sua capacità di

pensare logicamente, di fare dei piani e di chiedersi “che cosa accadrebbe, se?”. Privi di altre caratteristiche utili alla sopravvivenza, come forza e velocità, i nostri antenati furono costretti a fare affidamento su ingegno e lungimiranza. La capacità di pensare logicamente divenne il nostro solo, grande super-potere e da lì, col tempo, derivò la nostra capacità di comunicare in modo complesso, di usare simboli e di dare un senso razionale al mondo intorno a noi.

Come tutti gli animali, riusciamo a fare al volo un bel po' di matematica difficile. Il semplice atto di afferrare una palla (o di evitare i predatori o di cacciare una preda) implica la risoluzione di molte equazioni in simultanea e ad alta velocità. Basta provare a programmare un robot per fare la stessa cosa e la complessità dei calcoli necessari appare subito evidente. Ma la grande forza degli esseri umani fu la loro capacità di passare dal concreto all'astratto, cioè di analizzare le situazioni, di porsi domande del tipo ‘se/allora’, di fare dei piani.

L'alba dell'agricoltura portò con sé la necessità di registrare con accuratezza il volgere delle stagioni, e lo sviluppo del commercio e delle comunità stanziali significò scambi e conti da tenere. Per questi due motivi pratici, calendari e scambi commerciali, fu necessario sviluppare qualche sistema per calcolare e così fece la sua prima comparsa la matematica elementare. Uno dei luoghi in cui fiorì fu il Medio Oriente. Gli archeologi hanno trovato, durante i loro scavi, ricevute commerciali sumere su tavolette d'argilla risalenti circa a ottomila anni avanti Cristo. Dimostrano che questi popoli utilizzavano rappresentazioni del numero. Sembra però che, in quei tempi remoti, non considerassero il concetto come separato dall'oggetto contato. Avevano, per esempio, tavolette di forma diversa per merci diverse, come pecore oppure orci d'olio. Quando le parti si scambiavano un gran numero di tavolette, le tavolette venivano

sigillate in contenitori chiamati ‘bolle’, che dovevano essere aperti per verificarne il contenuto. Col tempo, cominciarono ad apparire sulle bolle dei segni per indicare quante tavolette contenevano. Le rappresentazioni simboliche diedero poi origine a un sistema numerico scritto, mentre le tavolette divennero un mezzo generico per contare oggetti di qualsiasi tipo e alla fine furono trasformate in una forma primitiva di moneta. Intanto il concetto di numero divenne indipendente dal tipo di oggetto da contare, sicché, per esempio, cinque era sempre cinque, che si riferisse a cinque capre o a cinque pagnotte.



*Gli Egizi avevano una buona conoscenza della matematica pratica e l'applicarono nella costruzione della piramide di Chefren a Giza, nella foto insieme con la Sfinge.*

Il collegamento tra matematica e realtà quotidiana, in questa fase, appare molto solido. Calcoli e contabilità sono strumenti pratici dell'agricoltore e del mercante e, se questi metodi



servono allo scopo, quale importanza ha la filosofia sottostante? L'aritmetica semplice sembra avere radici profonde nel mondo 'là fuori': una pecora più una pecora fa due pecore, due pecore più due pecore fa quattro pecore. Niente di più evidente. Ma a guardar più da vicino, ci accorgiamo che già è accaduto qualcosa di un po' strano. Nel dire "una pecora più una pecora" si presuppone che le pecore siano identiche, o quantomeno che, al solo scopo di contarle, le differenze non abbiano peso. Ma non ci sono due pecore uguali. Ciò che abbiamo fatto è astrarre una qualità percepita che ha a che fare con le pecore – il loro 'essere una', la loro separazione l'una dall'altra – per poi operare su questa qualità utilizzando un'altra astrazione, l'addizione. È un grande passo. In concreto, aggiungere una pecora a una pecora potrebbe significare metterle insieme sullo stesso campo. Ma, sempre in concreto, le pecore sono diverse l'una dall'altra e, se andiamo più a fondo della cosa, ciò che chiamiamo 'pecora' – come ogni oggetto nel mondo – non è veramente separato dal resto dell'universo. Oltretutto, c'è il fatto leggermente inquietante che ciò che (come le pecore) consideriamo oggetti 'là fuori' sono costruzioni nel nostro cervello ricavate da segnali che provengono dai nostri sensi. Anche se diamo per scontato che una pecora ha una qualche consistenza reale, la fisica ci dice che essa è un complicatissimo assemblaggio di particelle subatomiche in costante fluire. Eppure, in qualche modo, contando le pecore possiamo permetterci di ignorare questa monumentale complessità o meglio, nella vita di tutti i giorni, possiamo non rendercene neppure conto.

Di tutte le materie, la matematica è la più precisa e immutabile. La scienza e altri campi dell'attività umana sono, al massimo, approssimazioni a qualche ideale, sono soggetti al cambiamento e si evolvono nel tempo. Come osservò il matematico tedesco Hermann Hankel: "Nella maggior parte delle scienze,

una generazione distrugge ciò che è stato costruito da quella precedente e ciò che ha costruito l'una, la successiva la smonta. Solo nella matematica ogni generazione aggiunge un nuovo piano alla struttura preesistente". Fin dall'origine, questa differenza tra la matematica e le altre discipline è un dato ineludibile poiché la matematica ha inizio quando la mente estrapola, tra i messaggi percepiti attraverso i sensi, ciò che le appare sostanziale e permanente. È la premessa che conduce al concetto dei numeri naturali come strumento per misurare le quantità, e a quello dell'addizione e della sottrazione come strumenti base per combinare quantità. I concetti di uno, due, tre e così via, sono visti come caratteristiche comuni di collezioni di oggetti, qualunque cosa siano e per quanto differenti possano essere i singoli esemplari dello stesso tipo di oggetti. Quindi la qualità eterna, adamantina della matematica è garantita fin dall'origine ed è la sua forza più grande.

La matematica esiste. Su questo non c'è alcun dubbio. Il teorema di Pitagora, per esempio, è in qualche modo parte della nostra realtà. Ma *dove* esiste quando non si utilizza o quando non si concretizza in qualche forma materiale, e *dove esisteva*, parecchie migliaia di anni fa, prima che qualcuno ci pensasse? I platonici sono convinti che gli oggetti matematici, come i numeri, le figure geometriche e le relazioni tra loro, esistano indipendentemente da noi, dai nostri pensieri, dal linguaggio e dall'universo fisico. In quale specie di etereo reame abitino non è specificato, ma si suppone che siano in qualche modo 'là fuori'. Molti matematici, si può dirlo con buona approssimazione, fanno parte di questa scuola di pensiero e quindi condividono anche la convinzione che la matematica si scopre, non si inventa. Inoltre la maggior parte di loro probabilmente non ama molto filosofare ed è ben felice di continuare a occuparsi di matematica, esattamente come la

maggior parte dei fisici, lavorando nei laboratori o risolvendo problemi teorici, non si preoccupa granché della metafisica. Eppure la natura ultima delle cose – in questo caso degli oggetti matematici – è un tema interessante, anche se non arriviamo mai a dare una risposta definitiva. Il matematico e logico prussiano Leopold Kronecker pensava che fossero dati solo numeri interi o, per dirla con parole sue: “Dio ha creato i numeri interi, tutto il resto è opera degli uomini”. L’astrofisico inglese Arthur Eddington si spinse oltre e disse: “La matematica non c’è finché non ce la mettiamo noi”. Il dibattito sulla natura della matematica, se sia un’invenzione o una scoperta, o sia forse una qualche combinazione di entrambe, generata dalla sinergia di mente e materia, continuerà senza dubbio ad agitare gli animi e, in definitiva, potrebbe non approdare a una risposta semplice.

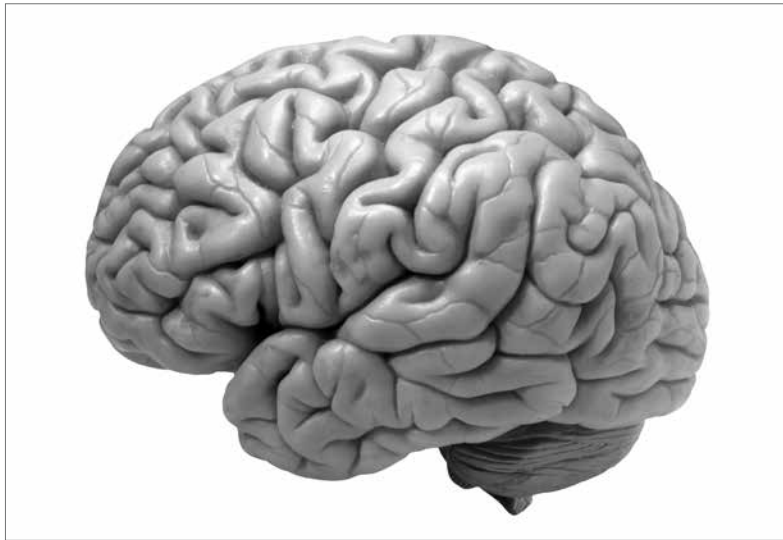
Un fatto è chiaro: se in matematica si dimostra che un enunciato è vero, resterà tale per sempre. Non c’è spazio per opinioni o influenza soggettiva. “La matematica mi piace”, osservò Bertrand Russell, “perché non è umana e non ha nulla in particolare da spartire con questo pianeta né con l’intero universo accidentale”. David Hilbert diede voce a un’idea simile: “La matematica non conosce razze né confini geografici: per la matematica il mondo culturale è un paese solo”. Questa qualità impersonale e universale della matematica è la sua forza più grande, eppure, all’occhio esperto, ciò non toglie nulla al suo fascino estetico. “Il primo test è di bellezza: non c’è posto nel mondo per la brutta matematica”, osservò il matematico inglese G.H. Hardy. Della stessa opinione, ma partendo dal campo della fisica teorica, fu Paul Dirac: “Una delle fondamentali caratteristiche della natura sembra essere il fatto che le leggi fondamentali della fisica siano espresse per mezzo di una teoria matematica di grande bellezza e potenza”.

Rispetto all’universalità della matematica, tuttavia, la medaglia ha un rovescio. La matematica può sembrare fredda e sterile, priva di passione e sentimento. Di conseguenza potremmo scoprire che, anche se esseri intelligenti di altri mondi condividessero con noi la stessa matematica, essa non sarebbe tuttavia lo strumento migliore per scambiare idee su gran parte degli argomenti che ci stanno a cuore. “Molte persone suggeriscono di usare la matematica per parlare con gli alieni”, ha commentato il ricercatore del Seti, Seth Shostak, “e l’informatico olandese Alexander Ollongren ha sviluppato un intero linguaggio (Lincos) fondato su questa idea. Ma la mia personale opinione è che la matematica potrebbe rivelarsi uno strumento inadeguato per esprimere idee come amore e democrazia”.

Lo scopo finale degli scienziati, certamente dei fisici, è ridurre ciò che osservano nel mondo a un’espressione matematica. Cosmologi, fisici delle particelle e simili raggiungono il massimo della soddisfazione quando misurano e quantificano i fenomeni e poi individuano la relazione tra le quantità. L’idea che l’universo sia fondamentalmente matematico ha radici antiche, che risalgono almeno fino ai Pitagorici. Galileo vedeva il mondo come un “gran libro” scritto in lingua matematica, e molto più recentemente, nel 1960, il fisico e matematico ungherese naturalizzato americano Eugene Wigner scrisse un saggio intitolato *L’irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali*.

Nel mondo reale non vediamo direttamente i numeri e dunque non ci risulta immediatamente ovvio che tutto intorno a noi è matematica. Ma vediamo le figure – le forme quasi sferiche dei pianeti e delle stelle, la curva percorsa dagli oggetti quando sono lanciati o sono in orbita, la simmetria dei fiocchi di neve, e così via – e tutti questi fenomeni si possono descrivere attraverso la relazione tra numeri. Altre regolarità, traducibili

in matematica, emergono dal modo in cui si comportano l'elettricità e il magnetismo, da come ruotano le galassie e operano gli elettroni entro i confini degli atomi. Queste regolarità e le equazioni che le descrivono spiegano singoli eventi e sembrano rappresentare verità senza tempo sottostanti alla mutevole complessità in cui ci troviamo. Il fisico Heinrich Hertz, che per primo diede la definitiva dimostrazione dell'esistenza delle onde elettromagnetiche, osservò: "Non si sfugge alla sensazione che queste formule matematiche abbiano una vita indipendente e un'intelligenza tutta loro, che siano più sagge di noi, anche più sagge di chi le ha scoperte, e che ne ricaviamo molto di più di quanto vi è stato trasfuso in origine".



*Perché il cervello umano si è evoluto per essere così straordinariamente abile in una materia – la matematica – che non gli serve per sopravvivere?*